

# 三次元有限要素法による回転機の高速度高精度数値解析技術の開発

プロジェクト責任者

中村 雅憲 東洋電機製造株式会社

著者

中村 雅憲<sup>\*1</sup>、河瀬 順洋<sup>\*2</sup>、山口 忠<sup>\*2</sup>、鵜飼 真吾<sup>\*2</sup>、中野 智仁<sup>\*2</sup>、西川 憲明<sup>\*3</sup>

\* 1 東洋電機製造株式会社

\* 2 岐阜大学

\* 3 独立行政法人海洋研究開発機構

利用施設： 独立行政法人海洋研究開発機構 地球シミュレータ

利用期間： 平成 19 年 10 月 10 日～平成 20 年 3 月 31 日

アブストラクト

本プロジェクトでは、三次元辺要素有限要素法を用いて電磁界を解析するプログラムを地球シミュレータ上に実装し、高速高精度な回転機の大規模磁界シミュレーションを行うことを目的とする。

今年度は本プロジェクト初年度であり、利用期間も短いため、従来 PC 用に研究開発してきた三次元磁界解析プログラムを地球シミュレータ上に移植し、線形ソルバ部のベクトル化ならびに、ノード内での並列化に重点を置いて最適化を行った。その結果、最適化する前に対して計算時間を約 1/190 にまで短縮することに成功した。

キーワード： 回転機、辺要素有限要素法、磁気ベクトルポテンシャル、マクスウェル方程式

## 1. はじめに

国内の消費電力のうち 50% 以上が回転機によって消費されており（図 1）、仮に国内すべての回転機の効率を 1% 改善したとすると、50 万 kW 級の原子力発電所 1 基分の電力が削減できると言われている<sup>1)</sup>。そのため、回転機の効率向上は環境問題において避けることの出来ない課題のひとつであると言える。

本プロジェクトでは、三次元辺要素有限要素法を用いて電磁界を解析するプログラムを地球シミュレータ上に実装し、回転機の大規模シミュレーションを行うことを目的とする。また、今年度は本プロジェクト初年度であり、利用期間も短いため、従来使用していたプログラムを地球シミュレータ上に移植すること、線形ソルバ部をベクトル化、ノード内で並列化することに重点を置いて最適化を行った。

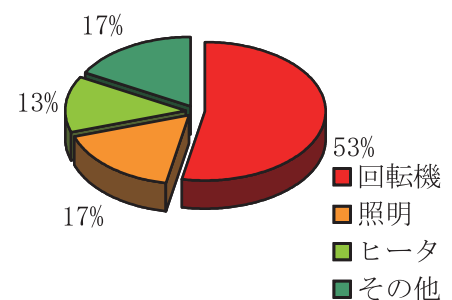


図 1 国内消費電力の内訳 (2003 年)

## 2. 解析手法

本プロジェクトでは回転機の磁界を辺要素有限要素法を用いて解析している。以下にその手法の概略を示す。

### 2.1 基礎方程式<sup>2,3)</sup>

渦電流を考慮した磁界解析の基礎方程式は、マクスウェルの電磁方程式より磁気ベクトルポテンシャル  $A$  と電気スカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて次式で表される。

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e + \nu_0 \text{rot } \mathbf{M}$$

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \phi \right)$$

$$\text{div } \mathbf{J}_e = 0$$

ここで、 $\nu$  は磁気抵抗率、 $\mathbf{J}_0$  は強制電流密度、 $\mathbf{J}_e$  は渦電流密度、 $\nu_0$  は真空の磁気抵抗率、 $\mathbf{M}$  は永久磁石の磁化、 $\sigma$  は導電率である。

### 2.2 計算方法

2.1 節で示した電磁界の基礎方程式のうち、磁気ベクトルポテンシャル  $A$  については四面体辺要素により、また、電気スカラーポテンシャル  $\phi$  については四面体節点要素により離散化 (図 2) した三次元有限要素法を用いて電磁界を求める。このように、 $A$  と  $\phi$  を連立させて解く方法は  $A$ - $\phi$  法と呼ばれる。  $\phi=0$  として解くこともできるが ( $A$  法と呼ばれる)、 $A$  法よりも  $A$ - $\phi$  法の方が線形ソルバの収束性が良いため<sup>4)</sup>、渦電流を含む磁界解析を行う際は一般的に  $A$ - $\phi$  法が用いられている。

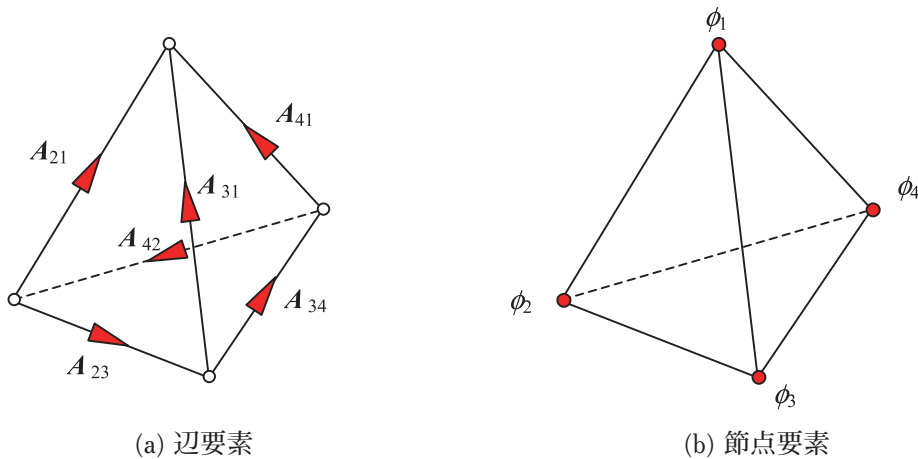


図 2 四面体要素

## 3. 地球シミュレータ向けの最適化

地球シミュレータ上で解析プログラムを高速に動作させるために、PC 用に研究開発してきた三次元磁界解析プログラムの線形ソルバを ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) 法から並列化しやすい対角スケール前処理付き CG 法 (以下 SCG 法と略記) に変更した。また、行列の格納方式をベクトル計算機向けの DJDS 方式に変更した。

### 3.1 線形ソルバの変更

従来、線形ソルバには ICCG 法を用いてきた。しかし、ICCG 法は大域的な処理を含むため、ノード内での並列化を実現するためにはブロック化やリオーダーリングなどの前処理を施す必要があるが、それらの前処理を施すことにより収束性が悪くなり、反復回数が急激に増加する。一方、CG 法は大域的な処理がなく、並列化しやすいが、ICCG に比べ反復回数が非常に多い。そこで、並列化しても反復回数に影響が出にくく、CG 法よりも高速に収束する SCG 法を用いることにした。以下に SCG 法のアルゴリズムを示す。

$$D^{-1} = \text{diag}[1/a_{11}, 1/a_{12}, \Lambda, 1/a_{mm}]$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = D^{-1}\mathbf{r}^{(0)}$$

for  $k = 0, 1, \Lambda$

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)}, D^{-1}\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}^{(k)}, A\mathbf{p}^{(k)})}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}$$

収束判定

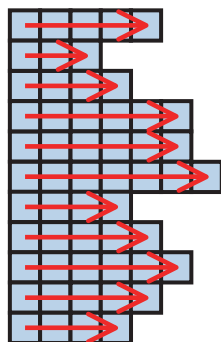
$$\beta_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k+1)}, D^{-1}\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)}, D^{-1}\mathbf{r}^{(k)})}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = D^{-1}\mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

end

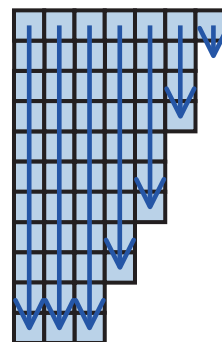
### 3.2 行列の格納方式の変更<sup>5)</sup>

SCG 法では、行列ベクトル積の計算に最も時間がかかり、全計算時間の約半分を占める。ベクトル計算機を用いた地球シミュレータ上での高速化を実現するためには、行列の格納方式をベクトル化率が高いものに変更する必要がある。従来、スカラ計算機向けに CRS (Compressed Row Storage) 方式を用いた行列の格納方式を、ベクトル計算機向けの DJDS (Descending order Jagged Diagonal Storage) 方式に変更した (図 3)。



(a) CRS 方式

- ・メモリの節約が可能
- ・ループ長が短い
- ・スカラ計算機向き



(b) DJDS 方式

- ・非零要素が多い順に行を入れ替え、処理を削減
- ・ループ長が長い
- ・ベクトル計算機向き

図 3 行列の格納方式

#### 4. 解析モデル

図4に解析モデルを示す。解析モデルは埋め込み磁石構造回転機であり、解析領域はその対称性から周方向に1/3、軸方向に1/22とした。図5に三次元分割図を示す。解析モデルの要素数は289,220、未知数は323,454である。なお、ニュートン・ラプソン法を用いて磁性体の非線形性を考慮した磁界解析を行った。

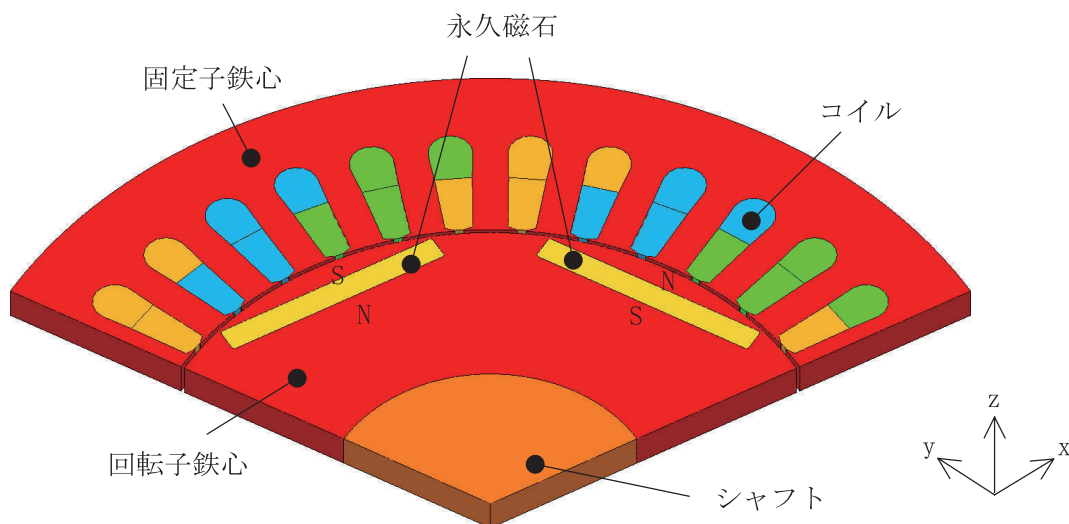


図4 解析モデル

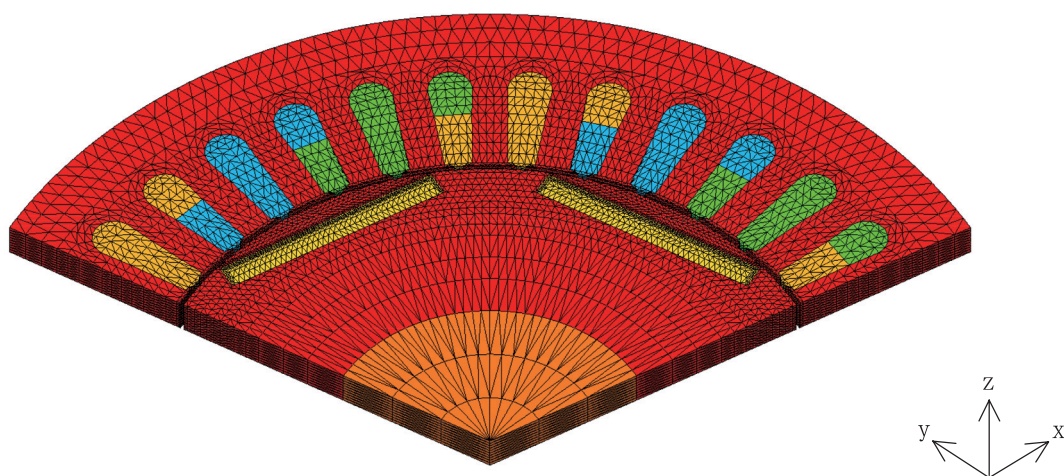


図5 三次元分割図

#### 5. 計算結果

図6に磁束密度ベクトル分布を示す。線形ソルバと行列の格納方式を変更しても、正しく計算できていることが確認できた。表1に計算時間を示す。表1より、ソルバをCG法からSCGに変更することで計算時間を約1/9に、SCG法において行列の格納方式をCRSからDJDSに変更することで約1/14に、さらに4プロセッサを使用してノード内並列化を行うことで約2/3に削減し、全体では約1/190にまで計算時間を短縮することができた。

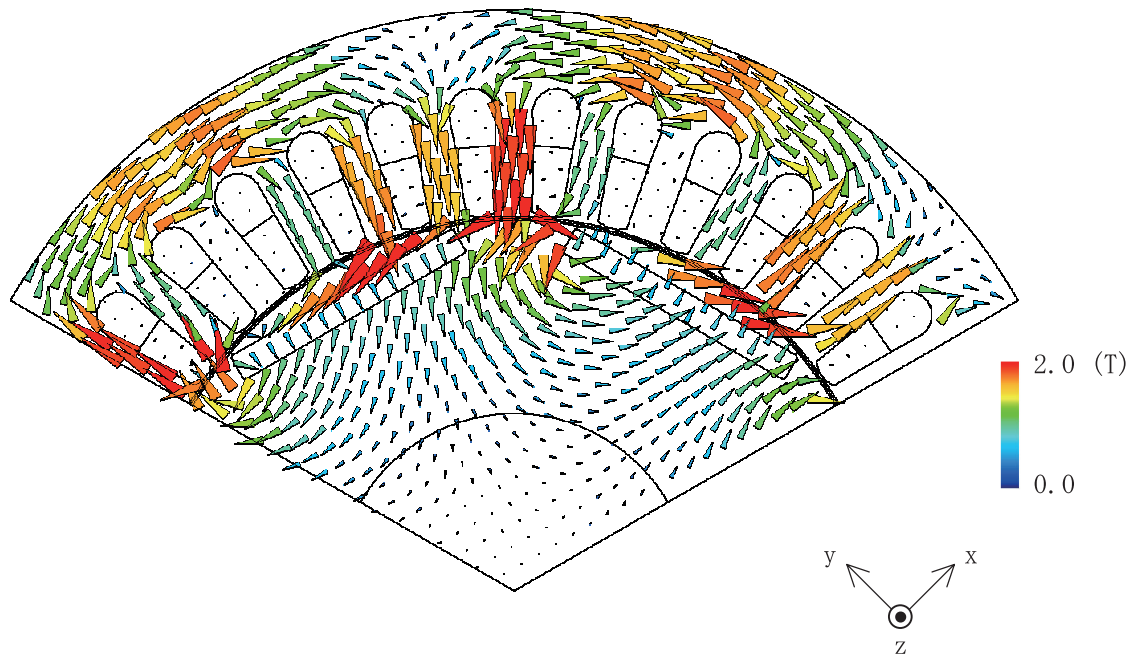


図6 磁束密度ベクトル分布

表1 計算時間

ソルバ	格納方式	プロセッサ数	計算時間 (s)
CG	CRS	1	15,420
SCG			DJDS
	4		
			4

## 6. まとめ

従来 PC 向けに研究開発してきた三次元磁界解析プログラムを地球シミュレータ上に移植し、線形ソルバ部のベクトル化、ノード内で並列化を行い、約 1/190 にまで計算時間を短縮することができた。

## 7. 今後の計画

さらに大規模な解析領域を扱うため、領域分割のための新しいデータ構造の開発と、ノード間並列計算用の線形ソルバを新規開発し、ノード間での並列化を行う予定である。

## 謝 辞

地球シミュレータの利用にあたり、独立行政法人 海洋研究開発機構 計算システム計画・運用部の平野 哲 部長、新宮 哲 産業利用推進グループリーダーからご指導、ご助言を頂きました。また、プログラムの最適化に関して、東京大学の中島研吾教授から貴重なご指導を頂きました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 藤原耕二：第 17 回電磁界数値解析に関するセミナー「磁気特性の利用テクニック」
- 2) 中田高義, 高橋則雄：「電気工学の有限要素法（第 2 版）」（1986）森北出版
- 3) 河瀬順洋, 伊藤昭吉：「最新 三次元有限要素法による電気・電子機器の実用解析」（1997）森北出版
- 4) K.Fujiwara, T.Nakata and H.Ohashi: "Improvement of Convergence Characteristic of ICCG Method for A- $\phi$  Method Using Edge Element", IEEE Trans. Magn., Vol32, No.3, pp804-807 (1996)
- 5) 奥田洋二, 中島研吾：「並列有限要素解析 I - クラスタコンピューティング」（2004）培風館